Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचितः मानव धर्म प्रणेता
सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

एकदिष्टता, वक्रता और माध्यमान प्रमेय
(Monotonicity, curvature & mean value theorems)

The Mean Value Theorem is the midwife of calculus – not very important or glamorous by itself, but often helping to delivery other theorems that are of major significance.....Pupcell, E. and Varberg, D.

एक फलप की एकदिष्टता (Monotonicity of a function) :

माना f एक वास्तविक मान फल है जिसका प्रान्त $D(D \subset R)$ और S, D का उपसमुच्च है, f को S में एक एकदिष्ट वर्द्धमान (ह्यासमान नहीं) कहते है। यदि प्रत्येक $x_1, x_2 \in S$ के लिये $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ f,S में एक एकदिष्ट ह्रासमान कहलाता है यदि प्रत्येक $x_1, x_2 \in S$ के लिये $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

f, S में निरन्तर वर्द्धमान कहलाता है कि (निरंतर एकदिष्ट वर्द्धमान) यदि $x_1, x_2 \in S$ के लिये $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ठीक उसी तरह f 'S में निरन्तर ह्रासमान कहलाता है। (निरन्तर एकदिष्ट ह्रासमान) यदि $x_1, x_2 \in S$ के लिये $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

नोट
(i) f निरंतर वर्द्धमान है $\Rightarrow$ f एकदिष्ट वर्द्धमान है (ह्रासमान नहीं) लेकिन विलोम आवश्यक नहीं कि सत्य हो।
(ii) f निरंतर ह्रासमान है $\Rightarrow$ f एकदिष्ट ह्रास है (वर्द्धमान नहीं) यहां भी विलोम आवश्यक नहीं कि सत्य हो
(iii) यदि f(x), $x \in S$ के लिये अचर है, तो f वर्द्धमान है और साथ ही S में ह्रासमान है।
(iv) एक फलन f एकदिष्ट वर्द्धमान कहलाता है यदि यह इसके पूर्ण प्रान्त में एकदिष्ट वर्द्धमान है। ठीक इसी तरह यदि f इसके पूर्ण प्रानत में एकदिष्ट ह्रासमान है तो हम कहते है कि f एकदिष्ट ह्रासमान है।
(v) f एकदिष्ट फलन में यदि या तो यह एक एदिष्ट वर्द्धमान है या एकदिष्ट ह्रासमान है।
(vi) यदि f, S क एक उपसमुच्चय में वर्द्धमान है और S के दूसरे उपसमुच्चय में ह्रासमान है, तो f,s में एक दिष्ट नहीं है।

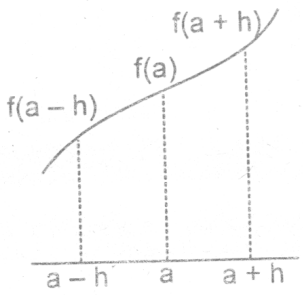
एकदिष्टता जाँचने के लिये अवकलन का उपयोग (Application of differentiation for detecting monotonicity):

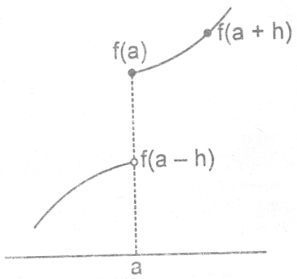
माना I एक अन्तराल (खुला बन्द या अर्ध खुला या अर्ध बन्द है)
(i) यदि $f'(x) > 0 \forall x \in I$ तो f,I में निरन्तर वर्धमान है।
(ii) यदि $f'(x) < 0 \forall x \in I$ तो f,I में निरन्तर ह्रासमान है।

नोट : यदि $f'(x) > 0 \forall x \in I, I$ के भिन्न–भिन्न कई उन बिन्दुओं को छोड़कार जिन पर f'(x)=0 हो तो f भी I में निरन्तर एकदिष्ट वर्धमान है। निरन्तर एकदिष्ट ह्रासमान फलन के लिये भी यही स्थिति है। (भिन्न भिन्न कई बिन्दुों का मतलब है कि ऐसे बिन्दु जिन पर f'(x)=0 हो, एक अन्तराल नहीं बनाते हो)

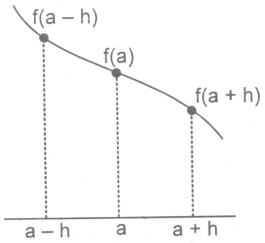
एक बिन्दु पर फलन की एकदिष्टता (Mnotonicity of functin at a point):

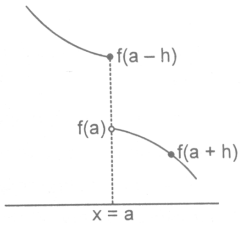
1. बिन्दु $x = a, a \in D_f$ पर फलन f(x) निरन्तर वर्द्धमान फलन कहलाता है। यदि x=a के परतिः पर्याप्त अल्प सामिप्य में निरन्तर वर्द्धमान है।



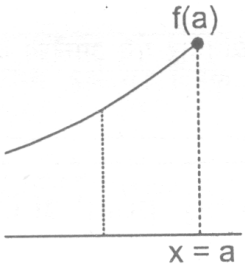


2. बिन्दु $x = a, a \in D_f$ पर फलन f(x) निरन्तर ह्रासमान फलन कहलाता है। यदि x=a के परतिः पर्याप्त अल्स सामिप्य है में निरन्तर ह्रासमान है।

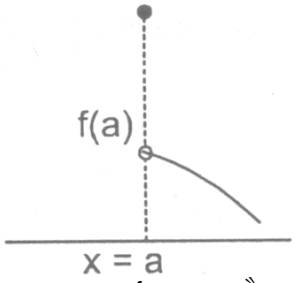




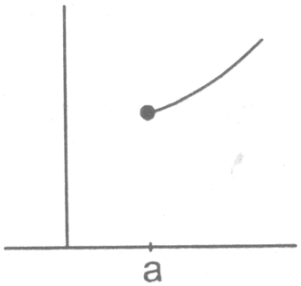
नोट : यदि x=a परिसीमा बिन्दु हो, तो फलन f(x) की एकदिष्टता परीक्ष के लिये एक ओर की असमिका का उपयोग उचित है।



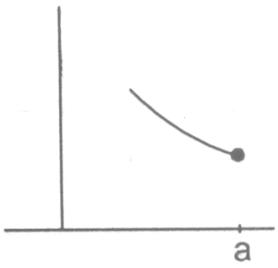
x=a पर f वर्द्धमान है



x=a पर f ह्रासमान है

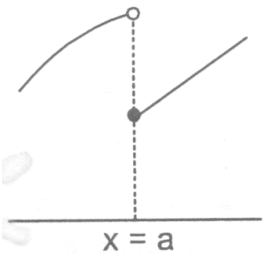


x=a पर f वर्द्धमान है

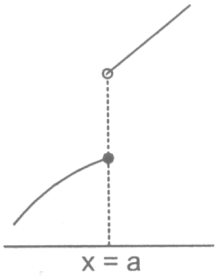


x= a पर f ह्रासमान है

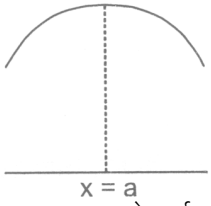
उदाहरण : x= पर कौनसा फलन वर्द्धमान, ह्रासमान या न तो वर्द्धमान न ही ह्रासमान है।



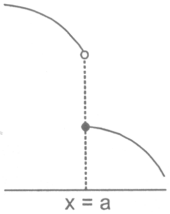
(i) x=a पर न तो वर्द्धमान नही ह्रासमान



(ii) x=a पर वर्द्धमान



(iii) x=a पर न तो वर्द्धमान



(iv) x=a पर ह्रासमान

न ही ह्रासमान

एक बिन्दु पर वर्द्धमान एवं ह्रासमान फलन के लिए परीक्षण
(Test for increasing and decreasing functions at a point)

(1) यदि f'(a)>0 हो तो x=a पर f(x) वर्द्धमान है।
(2) यदि f'(a)<0 हो तो x=a पर f(x) ह्रासमान है।
(3) यदि f'(a)=0 हो, तो a के बायें सामिप्य और दायें सामिप्य पर f'(x) के चिन्ह की जांच करते है।
  (i) यदि दोनों सामिप्यों पर f'(x) धनात्मक है, तो f, x=a पर वर्द्धमान है।
  (ii) यदि दोनों सामिप्यों पर f'(x)) ऋणात्मक है, तो f' x=a पर ह्रासमान है।
  (iii) यदि इस सामिप्यों पर f'(x) के चिन्ह विपरीत हो तो f, x=a पर एकदिष्ट नहीं है।

असमिका सिद्ध करने के लिऐ एकदिष्टता का उपयोग (use of motonicity for proving inequalities):

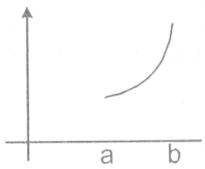
दो फलनों f(x) एवं g(x) की तुलना h(x) = (fx)-g(x) के एकदिष्ट व्यवहार एवं आलेख के विश्लेषण से की जा सकती है।

अवतलता, उत्तलता और नति परविर्तन बिन्दु (Concavity, convexity, point of inflection):

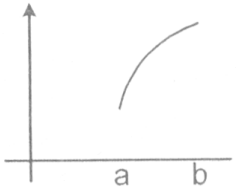
एक फलन f(x), (, b) में अवतल है यदि प्रत्येक बिन्दु $(x_0(f(x_0))$ पर खींची गई स्पर्श रेखा वक्र के नीचे रहती है, f(x) (a, b) में उत्तल है यदि प्रत्येक बिन्दु $(x_0 f(x_0))$ पर खींची गई स्पर्श रेखा वक्र के ऊपर रहती है।

एक फलन f(x) जो आलेख f(x) पर है इसका परविर्तन बिन्दु कहते है यदि f(x) $(c-\delta,c)$ में अवतल है और $(c,c+\delta)$ में उत्तल है। (तथा विलोमतः) कुछ $\delta \in R^+$ के लिऐ–

परिणाम 1. यदि $f''(x) > 0 \forall x \in (a,b)$, तो वक्र y=f(x) (a, b) में अवतल है।



2. यदि $f''(x) < 0 \forall x \in (a,b)$, तो वक्र y=f(x) (a, b) में उत्त्ल है।



3. यदि f, x=c पर सतत् है और f''(x), c के दोनों तरफल विपरीत चिन्ह रखता है तो बिन्दु (c, f(C)) वक्र का नति परविर्तन बिन्दु कहलाता है।

4. यदि g''(c) = 0 और $f'''(c) \neq 0$, तो बिन्दु (c, f(c)) को नति परिवर्तन बिन्दु कहते है।

वक्रता के उपयोग से असमिकाओं का सत्यापन (Proving inequalities using curvature):

सामान्यता इस असमिकाओं में कुछ विशेष बिन्दुओं पर दो फलनों के मानों की तुलना की जाती है।

रोल प्रमेय (Rolle's theorem):

यदि कोई फलन f(x) इस प्रकार परिभाषित है कि
(i) f(x) संवृत अन्तराल $a \le x \le b$ में x का सतत् फलन है।
(ii) विवृत्त अन्तराल $a < < b$ में x के प्रत्येक बिन्दु के लिये f'(x) विद्यमान है।
(iii) f(x) = f(b).
तो कम से कम एक बिन्दु x=c इस प्रकार विद्यमान होगा कि $f'(c) = 0 \forall c \in (a,b)$.

नोटः इस प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ यह है कि (c,f(x)) पर स्पर्श रेखा क्षौतिज रेखा है।

लेगंराज माध्यमान प्रमेय (LMVT theorem):

मानाकि कोई फलन f(x) इस प्रकार परिभाषित है कि
(i) f(x) संवृत्त अंतराल $a \le x \le b$ में x का सतत् फलन है।
(ii) वृित्त अंतराल $a < x < b$ में x के प्रत्येक बिन्दु के लिये f'(x) विद्यमान है।
तो विवृत अंतराल (a, b) में कम सु कम एक बिन्दु x=c ऐसा विद्यमान होगा कि $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

नोट : (i) इस प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ यह है कि वक्र पर स्थिज्ञत किन्ही दो बिन्दुओं x=a एवं x=b को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता उन दोनों बिन्दुओं के मध्य स्थित किसी बिन्दु x=c पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होती है

(ii) LMVT की एक विशेष स्थिति रोल प्रमेय हैः
चूँकि $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$

EXERCISE -1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. अन्तराल जिसमें x^3 का मान $6x^2 + 15x + 5$ की अपेक्षा कम गति से बढ़ता है, है
(A) $(-\infty,-1)$ (B) $(-5,1)$ (C) $(-1,5)$ (D) $(5, \infty)$

2. फलन $\dfrac{|x-1|}{x^2}$ एकदिष्ट ह्रासमान है–
(A) $(2, \infty)$ (B) (0, 1) (C) (0, 1) तथा $(2,\infty)$ (D) $(-\infty,\infty)$

3. यदि $y = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 1, x$ के समस्त वास्तविक मानों के लिए एकदिष्ट ह्रासमान है, तो 'a' किस अंतराल में है– $\forall x \in R$
(A) $(-\infty,-3)$ (B) $(-\infty,-2) \cup (-2,3)$ (C) $(-\infty,\infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $f(x)=\left(\frac{\sqrt{p+4}}{1-q}-1\right)x^5-3x+\ln 5$ x के समस्त वास्तविक मानों के लिये ह्रासमान है, तो p के मान है–

(A) $(-\infty,\infty)$ (B) $\left[-4\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right]\cup(1,\infty)$

(C) $\left[-3,\frac{5-\sqrt{27}}{2}\right]\cup(2,\infty)$ (D) $[1,\infty)$

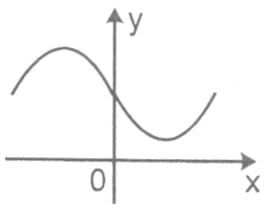
5. x के वास्तविक मानों का सही समुच्चय, जिसके लिये $f(x)=x\ell nx-$ धनात्मक है है–

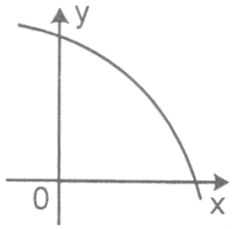
(A) $(1,\infty)$ (B) $(1/e,\infty)$ (C) $[e,\infty)$ (D) (0, 1) तथा $(1,\infty)$

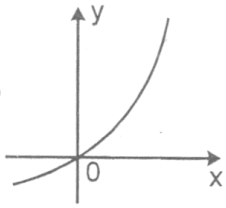
6. $\ell n(1+x)\le x$ के लिये x के समस्त मानों का समुच्चय है–

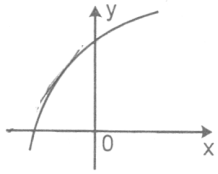
(A) x > 0 (B) x > -1 (C) -1 < x < 0 (D) रिक्त समुच्चय

7. x के समस्त वास्तविक मानों के लिये f'(x) > 0 तथा f''(x) < 0 तो वक्र लत्र y =f(x) है–

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

8. 'a' के किस मान के लिये फलन $f(x)=x^4+ax^3+\frac{3x^2}{2}+1$ सम्पूर्ण वास्तविक रेखा पर ऊपर की ओर अवतल है।

(A) $a\in[0,\infty]$ (B) $a\in(-2,2)$ (C) $a\in[-2,2]$ (D) $a\in(0,\infty)$

9. यदि बिन्दु (1, 3) वक्र $y = ax^3 + bx^2$ पर नति परिवर्तन की तरह कार्य करताहै, तो 'a' और 'b' का मान है।

(A) a = 3/2 & b = -9/2 (B) a 3/ 2 & b = 9/2

(C) a = -3/2 & b = -9/2 (D) a = - 3/2 & b =9/2

10. फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ अंतराल [1, 3] में रोल प्रमेय के सभी प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है तो a एवं b के मान है–

(A) 11, - 6 (B) -6, 11 (C) -11, 6 (D) 6, -11

11. फलन $f(x)=x(x+3)e^{-x/2}$ अंतराल [-3, 0] में रोल प्रमेय के सभी प्रतिबन्धों को संतुष्ट करताहै। c का मान जो रोल प्रमेय की सत्यता सिद्ध करता है, है–

(A) 0 (B) -1 (C) -2 (D) 3

एक से अधिक विकल्प सही

12. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य है–
(A) $x + \sin x$ वर्द्धमान फलन है
(B) $\sec x$ न हो वर्द्धमान फलन है न ही ह्रासमान फलन
(C) $x + \sin x$ ह्रासमान फलन है
(D) $\sec x$ वर्द्धमान फलन है।

13. फलन $f(x) = 2\log(x-2) - x^2 + 4x + 1$ किस अंतराल में वर्द्धमान है ?
(A) (1, 2) (B) (2 ,3) (C) $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ (D) (2, 4)

14. यदि $f(x) = 2x + \cot^{-1} x + \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ हो, तो फलन f(x) ;
(A) अन्तराल $[0,\infty]$ में वर्द्धमान है। (B) अन्तराल $[0,\infty)$ में ह्रासमान है।
(C) अन्तराल $[0,\infty)$ में न वर्द्धमान न ही ह्रासमान है। (D) अन्तराल $[-\infty,\infty]$ में वर्द्धमान है।

15. यदि अन्तराल $0 \le x \le 1$ में $g(x) = 2f(x/2) + f(1-x)$ एवं $f''(x) < 0$ हो, तो g(x)
(A) $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ में ह्रासमान है। (B) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ में ह्रासमान है।
(C) $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ में वर्द्धमान है। (D) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ में वर्द्धमान है।

16. यदि अन्तराल $[0, 2\pi]$ में फलन $f(x) = \sin x + \cos x$ परिभाषित हो तो f(x)
(A) $(\pi/4, \pi/2)$ में वर्द्धमान है। (B) $(\pi/4, 5\pi/4)$ में ह्रासमान है।
(C) $[0,\pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi]$ में वर्द्धमान है। (D) $[0,\pi/4] \cup [\pi/2, 2\pi]$ में ह्रासमान है।

17. यदि $f(x) = \tan^{-1} x - (1/2)\ell n\, x$ हो तो
(A) अन्तराल $\left[1/\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ में f(x) का महत्तव मान $\pi/6 + (1/4)\ell n 3$ है।
(B) अन्तराल $\left[1/\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ में f(x) का न्यूनतम मान $\pi/3 - (1/4)\ell n 3$ है।
(C) अन्तराल $(0,\infty)$ में f(x) ह्रासमान है।
(D) अन्तराल $(-\infty, 0)$ में f(x) वर्द्धमान है।

18. यदि $f(x) = \log(x-2) - \frac{1}{x}$, तो
(A) $x \in (2,\infty)$ के लिये f(x) एकदिष्ट वर्द्धमान है। (B) $x \in [-1, 2]$ के लिये f(x) एकदिष्ट वर्द्धमान है।
(C) f(x) हमेशा नीचे की ओर अवतल है। (D) जहाँ भी $f^{-1}(x)$ परिभाषित है, एकदिष्ट वर्द्धमान है।

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. माना $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \ge 0 \\ ax & x < 0 \end{cases}$ a के वास्तविक मान ज्ञात कीजिए जिनके लिये f(x), x=0 पर निरन्तर एकदिष्ट वर्द्यमान है।

2. (i) प्रदर्शित कीजिए कि $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$ अनतराल $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान फलन फलन है।

(ii) प्रदर्शित कीजिए कि $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\ell n(1+x)$ वर्द्धमान फलन है जब $x>-1$ हो।

3. यदि प्रत्येक $x\in R$ के लिये $f(x)=x^3+(a-1)x^2+2x+1$ निरन्तर एकदिष्ट वर्द्धमान है, तो 'a' के मानों का परिसर ज्ञात कीजिए।

4. निम्न फलनों की एकदिष्टता के लिये अन्तराल ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{x^2}{4}+\frac{x^3 3}{}-3x^2+5$ (ii) $\sin\frac{\pi}{x}$ (iii) $\log_3^2 x+\log_3^x$

5. 'a' के मान ज्ञात कीजिए जबकि फलन $(x)=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-1, x$ में प्रत्येक मान के लिये घटता है।

6. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$ में $f(x)=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\ell n x$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $x\in R$ के लिये g(x) एकदिष्ट वर्द्धमान और f(x) एकदिष्ट ह्रासमान है और यदि (gof) (x), $x\in R$ के लिये परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि (gof) (x) एक ह्रासमान फलन है अतः सिद्ध कीजिए कि $(gof)(x+1)<(gof)(x-1)$.

8. एकदिष्टता का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि (i) $x<-\ell n(1-x)<x(1-x)^{-1}, 0<x<1$ के लिये

(ii) $\frac{x}{1+x^2}<\tan^{-1}x<x$, प्रत्येक $x>0$ के लिये

9. असमिका के लिये सिद्ध कीजिए – $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}, 0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ के लिये

10. $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ के लिये (2sinx + tanx) या (3x) में से बड़ा कोन सा है, अतः $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3x}{2\sin x+\tan x}\right]$ ज्ञात कीजिए, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है।

11. अन्तरा [a, b] जहाँ $0<a<b$ में फलन $f(x)=\log_e\left(\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right)+p$ के लिये रोल प्रमेय सत्यापित कीजिए।

12. रोल प्रमेय की सहायकता से सिद्ध कीजिए कि समीरण $3x^2 + px - 1 = 0$ का कम से कम एक वास्तुविक मूल, अन्तराल (-1, 1) में रहता है।

13. यदि समीकरण $a_0x^n+a_1x^{n-1}+------+a_{n-1}x=0$ का एक मूल α धनात्मक है तो सिद्ध कीजिए की समीरण $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+------+a_{n-1}=0$ का भी एक धनात्मक मूल α से छोटा है।

14. अन्तराल [-1 ,1] में $f(x)=1/x$ के लिये लेंग्राज मध्यमान प्रमेय लागू नहीं होने की व्याख्या कीजिए।

15. यदि a, b दो वास्तविक संख्याऐं a<b है, तो प्रदर्शित कीजिए कि a तथा b के मध्य एक वास्तविक संख्या 'c' इस प्रकार विद्यमान है कि $3c^2 = b^2 + ab + a^2$ है।

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

16. यदि $a > b > 0$ तो लेंग्राज के सूत्र की सहायता से असमिका $nb^{n-1}(a-b) Ma^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ यदि $n > 1$ की सत्यना की जांच करो। यह भी सिद्ध करो कि असमिका विलोम अर्थ में होगी यदि $0 < n < 1$.

EXERCISE - 2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. माना वास्तविक संख्याओं के समुच्च R में फलन $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5\sin^2 x$ वर्द्धमान है, तो a एवं b द्वारा संतुष्ट प्रतिबंध है:–

(A) a^2 - 3b 15 > 0 (B) a^2 -3b +15 ≤ 0 (C) a^2 - 3b - 15 < 0 (D) a > 0 & b > 0

2. यदि $a > 1, a \neq 1$ एवं $x \in R$ के लिये $f(x) = a^{\{a^{|x|}\operatorname{sgn} x\}}; g(x) = a^{\left[a^{|x|}\operatorname{sgn} x\right]}$ हो जहां { } एवं [ ] क्रमशः भिन्नात्मक भाग फलन एवं पूर्णांक भाग फलन को प्रदर्शित करते है, तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन फलन h(x) के लिये सत्य है।, जहां $(\ell n a)h(x) = (\ell n f(x) + \ell n g(x))$

(A) 'h' सम तथा वर्द्धमान है। (B) 'h' विषम तथा ह्यसमान है ।

(C) 'h' सम तथा ह्यासमान है। (D) 'h' विषम तथा वर्द्धमान है।

3. यदि f(x) = (x-4) (x-5) (x-6) (x-7) हो, तो

(A) f'(x) = 0 के चार मूल है।।
(B) f'(x) = 0 के तीन मूल $(4,5) \cup (5,6) \cup (6,7)$ में स्थित है।
(C) समीकरण f'(x) = 0 केवल एक वास्तविक मूल है।
(D) f'(x) = 0 के तीन $(3,4) \cup (4,5) \cup (5,6)$ में स्थित है।

4. यदि f : [1, 10] → [1, 10] ह्यसमान फलन नहीं तथा g : [1, 10] → [1, 10] एक वर्द्धमान फलन नहीं है तथा h(x) = f(g(x) एवं h(1) = 1 हो, तो h(2) का मान–

(A) अन्तराल (1, 2) में स्थित है। (B) 2 से अधिक है।
(C) 1 के बराबर है। (D) परिभाषित नहीं है।

5. a के किन मानों के लिये वक्र $f(x) = x(a^2 - 2a - 2) + \cos x$ सभी $x \in R$ के लिए सदैव एकदिष्ट वर्द्धमान है ?

(A) $a \in R$ (B) $|a| < \sqrt{2}$

(C) $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$ (D) $|a| < \sqrt{2} - 1$

6. दिया गया f वास्तविक मानों का अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(x)\, f'(x) < 0$, $\forall x \in R$ तो–
(A) f(x) वर्द्धमान है। (B) f(x) ह्यसमान फलन है।
(C) $|f(x)|$ वर्द्धमान फलन है। (D) $|f(x)|$ ह्यसमान फलन है।

7. यदि $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - 2\cos x}; g(x) = \dfrac{x^2}{6x - 6\sin x}$ जहां $0 < x < 1$ हो, तो–

(A) 'f' एवं 'g' दोनों वर्द्धमान फलन है।
(B) 'f' ह्यसमान फलन है तथा 'g' वर्द्धमान फलन है।

(C) 'f' वर्द्धमान फलन है तथा 'g' ह्रासमान फलन है।
(D) 'f' एवं 'g' दोनों ह्रासमान फलन है।

8. यदि फलन $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 5x$ अन्तराल [1, 2] के लिये लेंग्राज मध्यमान प्रमेय को संतुष्ट करता है और x = 7/4 पर एक वक्र y = f(x) की स्पर्श रेखा कोटि x=1 और x= 2 को जोड़ने वाली वक्र की जीवा के समानान्तर है, तो a का मान है।

(A) 35/16 (B) 35/48 (C) 7/16 (D) 5/16

9. $f : R \to R \forall x \in R$ के लिये अवकलनीय फलन है, यदि वक्र पर स्थित किसी बिन्दु $x \in (a,b)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा हमेशा वक्र के नीचे गमन करता है, तो

(A) $f'(x) > 0, f''(x) < 0 \forall x \in (a,b)$
(B) $f'(x) < 0, f''(x) < 0 \forall x \in (a,b)$
(C) $f'(x) > 0, f''(x) > 0 \forall x \in (a,b)$
(D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

10. निम्नलिखित में से कौनसे फलन रोल प्रमेय प्रतिबन्धों को संतुष्ट नहीं करते है ?

(A) $e^x \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
(B) $(x+1)^2(2x-3)^5, x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$
(C) $\sin|x|, x \in [\pi, 2\pi]$
(D) $\sin\frac{1}{z}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

11. माना सभी $x \in$ के लिऐ $h(x) = x^{m/n}$ है, जहां m और n क्रमशः सम एवं विषम पूर्णांक है। और 0 < m < n है, तो

(A) अन्तराल $(-\infty, 0]$ में f(x) ह्रासमान है।
(B) अन्तराल $[0, \infty)$ f(x) में वर्द्धमान है।
(C) अन्तराल $(-\infty, 0]$ में f(x) वर्द्धमान है।
(D) अन्तराल $[0, \infty)$ में f(x) ह्रासमान है।

12. माना दो फलन f एवं g अन्तराल I में इस प्रकार परिभाषित है कि सभी $x \in I$ के लिऐ $f(x) \geq 0$ एवं $g(x) \leq 0$ है। तथा अन्तराल I में f निरन्तर ह्रासमान है जबकि अन्तराल I में g निरन्तर वर्द्धमान है, तो–

(A) फलन fg अन्तराल I में निरन्तर वर्द्धमान है।
(B) फलन fg अन्तराल I में निरन्तर ह्रासमान है।
(C) अन्तराल I में fog(x) एकदिष्ट वर्द्धमान है।
(D) अन्तराल I में fog(x) एकदिष्ट ह्रासमान है।

13. फलन $y = 2x^2 - \ell n|x|$ अन्तराल I_1 में एकदिष्ट वर्द्धमान है तथा अन्तराल I_2 में एकदिष्ट ह्रासमान है $x(\neq 0)$, तो

(A) $I_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
(B) $I_2 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$
(C) $I_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$
(D) $I_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

14. माना $\phi(x) = (f(x)^3 - 3(f(x))^2 + 4f(x) + 5x + 3\sin x + 4\cos x \forall \in R$, तो

(A) ϕ वर्धमान है जबकि f वर्धमान है।
(B) ϕ वर्धमान है जबकि f ह्रासमान है।
(C) ϕ ह्रासमान है जबकि f ह्रासमान है।
(D) यदि f'(x) =-11 तो ϕ ह्रासमान है।

15. यदि $\phi(x) = f(x) + f(2a - x)$ और $f''(x) > a, a > 0, 0 \leq x \leq 2a$ तो,

(A) $\phi(x)$ (a,2a) (a, 2a) में वर्द्धमान है। (B) $\phi(x)$ (0, a) में वर्द्धमान है।
(C) f(x) (0, a) में ह्रमान है। (D) $\phi(x)$ (a, 2a) में ह्रसमान है।

16. फलन $f(x) = x^4(12\ell nx - 7)$ के लिये

(A) बिन्दु (1, - 7) नति परिवर्तन बिन्दु है। (B) $x = e^{1/3}$ निम्निष्ठ का बिन्दु है।
(C) आलेख (0, 1) में नीचे की ओर अवतल है। (D) आलेख $(1,\infty)$ में ऊपर की ओर अवतल है।

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. एकदिष्टता का उपयोग करते हुये $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

2. यदि $f : [0,\infty) \to R$ एक फलन है जो $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{e^{x^2} + e^{-x^2}}$ से परिभाषित है, तो जाँच कीजिए कि f(x) एकैकी है या नहीं

3. रोल प्रमेय की सहाता से प्रदर्शित कीजिए कि अन्तराल (0, 1) के अनन्त बिन्दुओं पर फलन $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$ आ अवकलज शून्य हो जाताहै।

4. माना कि दो फलन f एवं g समुच्चय R में अवलनीय है। तथा f(0) = g(0) और सभी $x \geq 0$ के लिये $f'(x) \leq g'(x)$ है, तो प्रदर्शित कीजिए कि सभी $x \geq 0$ के लिऐ $f(x) \leq g(x)$ है।

5. एक फलन f अन्तराल $0 \leq x \leq 5$ में अवकलनीय इस प्रकार है कि f(0) = 4 एवं f(5)=-1. यदि $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि कोई $c \in (0,5)$ इस प्रकार विद्यमान है कि $g'(x) = -\dfrac{5}{6}$

6. सिद्ध कीजिए कि सभी $x \in$ के लिये $e^x + \sqrt{1+e^{2x}} \geq (1+x) + \sqrt{2+2x+x^2}$

7. मानाकि $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ के लिये $f'(\sin x) < 0$ एवं $f''(\sin x) > 0$ है तथा $g(x) = f(\sin x) + f(\cos x)$ है, तो वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें g(x) वर्द्धमान एवं ह्रसमान है।

8. यदि भी धनात्मक x के लिये $ax^2 + (b/x) \geq c$ हो, जहां $a > 0$ एवं $b > 0$, तो प्रदर्शित कीजिए कि $27ab^2 \geq 4c^3$

9. प्राचल a के उन सभी मानों का समुच्च ज्ञात कीजिए जिनके लिये फलन
f(x) = sin2x - 8(a + 1) sin x + $(4a^2 + 84 - 14)$ $x, \forall \in R$ वर्द्धमान है तथा $x \in R$ के लिये कोई क्रांतिक बिन्दु नहीं है।

10. 'a' के मानों का समुच्च ज्ञात कीजिए जिसके लिये फलन $f(x) = \dfrac{ax^3}{3} + (a+2)x^2 + (a-1)x + 2$ ऋणात्मक नति परिवर्तन बिन्दु रखता है।

11. $\ell n(1+x)$ एवं $\dfrac{\tan^{-1} x}{1+x}$ में से कौन बड़ा है। ?

12. माना f(x) और g(x) अवकनीय फलन है ताकि f(x) g'(x) ≠ f'(x) g(x) सिद्ध कीजिए कि f(x) के किन्हीं दो मूलों के मध्य g(x) का कम से कम एक मूल विद्यमान है।

13. एकदिष्टता का उपयोग करते हुये $x \in (0, \pi/2)$ के लिये सिद्ध कीजिए कि $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$

14. यदि f अन्तराल [a, b] में सतत् तथा (a, b) में अवकलनीय (जहाँ a > 0) है तथा $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$ सिद्ध कीजिए एक $x_0 \in (a,b)$ इस प्रकार विद्यमान है कि $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

EXERCISE - 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

1. **सतम्भ** II **स्तम्भ** II

(A)	अन्तराल में $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ निरन्तर वर्द्धमान है।	(p)	$[6, +\infty)$
(B)	अन्तराल में $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 19$ निरन्तर बवर्द्धमान है।	(q)	$[7, +\infty)$
(C)	अन्तराल में $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ निरन्तर वर्द्धमान है।	(r)	$[1, +\infty)$
(D)	अन्तराल में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 7$ निरन्तर वर्द्धमान है।	(s)	$(1, +\infty]$

2. **स्तम्भ** I **स्तम्भ** II

(A)	$f(x) = \frac{\sin x}{e^x}, x \in [0, \pi]$	(p)	रोल प्रमेय के प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।
(B)	$f(x) = \text{sgn}((e^x - 1)\ell nx), x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$	(q)	लेग्रांज माध्यमान प्रमेय के प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।
(C)	$f(x) = (x-1)^{2/5}, x \in [0,3]$	(r)	रोल प्रेमेय के कम से कम एक प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है।
(D)	$f(x) = \begin{cases} x\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}\right), & x \in [-1,1] - \{0\} \\ 0\ , \ x = 0 \end{cases}$	(s)	लेग्रांज माध्यमान प्रमेय क कम से कम एक प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है।

3-B (कथन / कारण)

3. कथन–1 : यदि f(x) एक वर्द्धमान फलन है जिसकी अवतलता ऊपर की ओर है, तो $f^{-1}(x)$ की अतवलता भी ऊपर की ओर है।

कथन –2: यदि f(x) एक ह्यमसमान फलन है जिसकी अवतलता ऊपर की ओर है, तो $f^{-1}(x)$ की अवकलता भी ऊपर की ोर है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2 कथन–1 की सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

4. कथन–1: $\frac{2e^{x_1}+e^{x_2}}{3} > e^{\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right)}$ जहां e नेनियार स्थिरांक (Napier's constant) है।

कथन –2: यदि सभी $x \in R$ के लिए f'(x) तथा f"(x)$\forall$ धनात्मक है, तो सभी $x \in R$ के लिये f(x) की अवतलता ऊपर की ओर, वर्धमान है। और कोई जीवा वक्र के ऊपर स्थित है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2 कथन–1 की सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

5. कथन–1: माना $f: R \to R$ में तीन बार अवकलनीय अचरेत्तर फलन (thrice differentiable non constant function) है तथा अचर फलन नहीं है, तो f'"(x)=0 के दो क्रमागत वास्तविक मूलों के मध्य f(x)=0 के अधिकतम चार वास्तविक मूल होते है।

कथन–2: यदि [a, b] में f(x) अवकलनीय है, तो कम से कम एक $c \in (a,b)$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2 कथन–1 की सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

6. कथन–1: e^{π}, π^{e} से बड़ा है।

कथन –2: $f(x) = x^{1/x}$ एक वर्धमान फलन है जब $x \in [e,\infty)$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2 कथन–1 की सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है, कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. **अनुच्छेद**

यदि एक फलन $f: R \to R$ को $f(x) = 2\sin^2 2x + \frac{3}{4}\sin 4x + ax$ से परिभाषित किया जाता है, जहां R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और a वास्तविक संख्या है, तो

7.1 सभी $x \in$ के लिए f(x) के निरन्तर वर्द्धमान होने के लिऐ a के मानों का सम्पूर्ण समुच्चय है–

(A) $(-\infty,-5]$ (B) $(-5,\infty)$ (C) $[5,\infty)$ (D) $(-\infty,5]$

7.2 सभी $x \in R$ के लिए f(x) के निरन्तर ह्यसमान होने के लिये a के मानों का सम्पूर्ण समुच्चय है–

(A) $(-\infty,-5]$ (B) $(-5,\infty)$ (C) $[5,\infty)$ (D) $(-\infty,5]$

73. f(x) के अचछादक होने के लिऐ a के मानों का सम्पूर्ण समुच्चय है–

(A) $(-\infty,\infty)-\{0\}$ (B) $(-5,\infty)$ (C) $[5,\infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

8. अनुच्छेद

माना कि f फलन है जो $f(x)=\sin^{-1}\sin\left(\frac{x+\sin x}{2}\right), \forall x\in[0,\pi]$ द्वारा परिभाषित है और $f(x)+f(2\pi-x)=\pi, \forall x\in[\pi,2\pi]$ को संतुष्ट करता है और सभी $x\in[2\pi,4\pi]$ के लिये $f(x)=f(4\pi-x)$ तो

8.1 यदि α उस सबसे बड़े अन्तराल की लम्बाई है जिसमें f(x) वर्द्धमान है, तो $\alpha=$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

8.2 यदि $x=\beta$ के सापेक्ष f(x) सममित है तो $\beta=$

(A) $\frac{\alpha}{2}$ (B) α (C) $\frac{\alpha}{4}$ (D) 2α

8.3 यदि $x=\gamma$ पर f(x) अवकलनीय नहीं है, जहाँ $x\in(0,4\pi)$ तो $\gamma=$

(A) $\frac{\beta}{2}$ (B) β (C) $\frac{\beta}{4}$ (D) 2β

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ के लिये $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ एकदिष्ट ह्रासमान फलन है।

10. फलन $y=\frac{2x^2-1}{x^4}$ न वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

11. अन्तराल [0, 1] में फलन $x^{100}+\sin x-1$ निरन्तर वर्द्धमान है।

12. माना f,x का अवकनीय फलन है जहाँ $\forall x\in R$ यदि $f(1)=-4$ और $f'(x)\geq 2, \forall x\in[1,6]$ तब f(6) का न्यूनतम मान 4 है।

13. यदि f(x), वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में परिभाषित निरन्तर वर्द्धमान वास्तविक फलन है तथा V एक वास्तविक अचर है, तो f(x) = C के हलों की संख्या हमेशा एक के बराबर है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

,14. दिये गए वक्र $y = 2\sin x + \cos 2x$ पर दो बिन्दु A(0, 1) $b\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ है, तब A और B के मध्य वक्र पर एक बिन्दु P इस प्रकार है कि P पर स्पर्श रेखा AB के समानान्तर है, तो P के निर्देशांक है–––––

15. समीकरण $\sin^{-1} x + 2^x = 3$ के हलों की संख्या है–––––

16. a के सभी मानों का समुच्चय जिसके लिये $f(x) = e^{2x} - (a+1)e^x + x$ हमेशा निरन्तर वर्द्धमान है, है–––––

17. माना f एक फलन है तथा $f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ तब अन्तराल–––––––– में f(x) वर्द्धमान है।

18. अन्तराल [1, 3] में फलन $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ के लिऐ लेग्रांज माध्य मान प्रमेय के C के मान है–––––

EXERCISE - 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2008

1. माना f(x) दो बार अवकलनीय अचरेत्तर (non-constant twice differentiable) फलन है जो $(-\infty,\infty)$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = f(1-x)$ तथा $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ तब

(A) f''(x) कम से कम दो बार [0, 1] पर शून्य होता है (B) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

(C) $\int_{-1/2}^{1/2} f\left(x + \frac{1}{2}\right)\sin x\,dx = 0$ (D) $\int_0^{1/2} f(t)e^{\sin \pi t}dt = \int_{1/2}^{1} f(1-t)e^{\sin \pi t}dt$

2. माना फलन $g:(-\infty,\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), g(u) = 2\tan^{-1}(e^u) - \frac{\pi}{2}$ द्वारा दिया गया है। तब g

(A) समय (even) है तथा $(0,\infty)$ निरन्तर वर्धमान (stritly increasing) है।

(B) विषम (old) है तथा $(-\infty,\infty)$ में निरन्तर ह्यसमान (srictly dereasing) है।

(C) विषम (odd) है तथा $(-\infty,\infty)$ में निरन्तर वर्धमान (strictly increasing) है।

(D) न तो सम (even) है और न ही विषम (odd) है किन्तु $(-\infty,\infty)$ में निरन्तर वर्धमान (strictly increasing) हैं

IIT-JEE-2007

3. माना कि x के सभी वास्तविक मानों के लिऐ $f(x) = 2 + \cos x$
वक्तव्य –1 : प्रत्येक वास्तविक f के लिए $[t,t+\pi]$ में एक बिन्दु c का अस्तित्व है, जिसके लिये $f'(c) = 0$
क्योंकि
वक्त्व्य –2 : प्रत्येक वास्तविक t के लिऐ $f(t) = f(t+2\pi)$

(A) वक्तव्य सत्य है तथा वक्तव्य 2, वक्तव्य 1 की सही व्याख्या करता है।
(B) वक्तव्य सत्य है परन्तु वक्तव्य 2, वक्तव्य 1 की सही व्याख्या नहीं करता है।
(C) वक्तव्य 1 सत्य है तथा वक्तव्य 2 असत्य है।
(D) वक्तव्य 1 असत्य है किन्तु वक्तव्य 2 सत्य है।

4. यदि $x_1 = (\tan\theta)^{\cot\theta}, c_2 = (\cot\theta)^{\cot\theta}, x_3 = (\tan\theta)^{\tan\theta}$ एवं $x_4 = (\cot\theta)^{\tan\theta}$ जहां $0 < \theta < \pi/4$ है, तो

(A) $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ (B) $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ (C) $x_1 < x_4 < x_3 < x_2$ (D) $x_1 < x_2 < x_4 < x_3$

IIT-JEE-2006

5. यदि दो बार अवकलनीय फलन f(x) इस प्रकार है कि f(a) = 0. f(b) = 2, f(c) = -1, f(d) = 2, f(e) = 0, जहाँ a < b < c < d < e हो, तो अन्तराल [a,e,] में $g(x) = (f'(x))^2 + f''(x)\, f(x)$ के शून्यों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2005

6. यदि दो बार अवकलनीय फलन f(x) इस प्रकार है कि x = 1,2,3 के लिऐ $f(x) = x^2$, rks
(A) सभी $x \in [1,3]$ के लिए $f''(x) = 2$ (B) कुछ $x \in (1,3)$ के लिए $f''(x) = 2$
(C) सभी $x \in 2,3]$ के लिए $f'(x) = 3$ (D) $x \in (2,3)$ के लिये $f''(x) = f'(x)$

7. f(x) एक अवकलनीय फलन है और g(x) दो बार अवकलनीय फलन इस तरह है कि $|f(x)| \le 1$ और f'(x)=g(x) यदि $f^2(0) + g^2(0) = 9.$ तो सिद्ध करो कि $c \in (-3,3)$ में इस तरह विद्यमान है कि g(c) . g''(c)<0.

IIT-JEE-2004

8. यदि शून्य के सामीप्य में f अवकलनीय तथा निरन्तर वर्द्धमान फलन हो, तो $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)-f(x)}{f(x)-f(0)} =$
(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) 2

9. यदि $f(x) = x^\alpha \log x$ एव f(0) = 0 हो तथा अन्तराल [0, 1] में f के लिये रोल प्रमेय लागू हो सकती हो, तो α कामान हो सकता है।
(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1/2

10. $p(x) = 51x^{101} - 2323x^{100} - 45x + 1035$ हो तो रोल प्रमेय का उपयोग करते हुऐ सिद्ध कीजिए कि p(x) = 0 का कम से कम एक मूल अन्तराल $(45^{1/100}, 46)$ में स्थित है।

11. अन्तराल $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ के लिय सिद्ध कीजिए कि $\sin x + 2x \geq \frac{3x(x+1)}{\pi}$ सम्बन्ध में प्रयुक्त असमिका को सत्यापित कीजिए।

IIT-JEE-2003

12. अन्तराल [0, 1] में लेगंराज माध्यमान प्रमेय किस फलन पर लागू नहीं होती है ?

(A) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & x < \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = x|x|$

(D) $f(x) = |x|$

13. सम्बन्ध $2(1 - \cos x) < x^2, x \neq 0$ का उपयोग करते हुये या इसके बिना सिद्ध कीजिये कि $\sin(\tan x) \geq x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

14. एक बहुपदीय फलन P(x) इस प्रकार है कि $P(1) = 0, P'(x) > P(x), \forall x > 1$, तो, सिद्ध कीजिए कि $P(x) > 0, \forall x > 1$.

15. माना $f : [0,4] \to$ का अवकलनीय फलन है, तो कुछ $a, b \in (0,4)$ के लिये प्रदर्शित कीजिए कि $f^2(4) - f^2(0) = 8f(a)f'(b)$

IIT-JEE-2002

16. वह सबसे बड़ा अंतराल जिसमें फलन $3\sin x - 4\sin^3 x$ वर्द्धमान है, की लम्बाई है–

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) π

IIT-JEE-2001

17. यदि $f(x) = xe^{x(1-x)}$ हो, तो फलन f(x) है–

(A) अंतराल $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ में वर्द्धमान

(B) R ह्यसमान

(C) R में बर्द्धमान

(D) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ में ह्यसमान

18. यदि $-1 \leq p \leq 1$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए की समीकरण $4x^3 - 3x - p = 0$ का अन्तराल $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ में एक अद्वितीय मूल है तथा इसे ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2000

19. सभी $x \in (0,1)$ के लिए

(A) $e^x > 1 + x$ (B) $\log_e(1+x) < x$ (C) $\sin x > x$ (D) $\log_e x > x$

20. माना दो कथन S एवं R निम्नलिखित है :

S : अन्तराल $(\pi/2, \pi)$ में sin x एवं cos x दोनों ह्यसमान फलन है।

R : यदि एक अवलनीय फलन अन्तराल (a, b) में ह्यसमान हो, तो इसका अवकलज भी अन्तराल (a,b) में ह्यासमान होगा निम्नलिखित में से कौनसा सही है?

(A) S एवं R दोनों गलत है।
(B) S एवं R दोनों ही सत्य है, परन्तु R,S की उचित व्याख्या नहीं है।
(C) S सत्य है तथा R,S की उचित व्याख्या है।
(D) S सत्य है एवं R गलत है।

IIT-JEE-1999

21. फलन $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ वर्द्धमान है यदि

(A) $0<x<\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{8}$ (C) $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$ (D) $\frac{5\pi}{8}<x<\frac{3\pi}{4}$

IIT-JEE-1998

22. यदि प्रत्येक वास्तविक x के लिए $h(x)=f(x)-(f(x))^2+(f(x))^3$ हो तो–

(A) जब f वर्द्धमान है तो h भी वर्द्धमान है। (B) जब f ह्रासमान है तो h वर्द्धमान है।
(C) 1 के बराबर है। (D) -1 के बराबर है।

23. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}, \forall x\in R$, तो f(x) का न्यूनतम मान–

(A) विद्यमान नहीं है क्योंकि f अपरिबद्ध है। (B) सम नहीं होती यद्यपि f परिबद्ध है।
(C) 1 के बराबर है। (D) -1 के बराबर है।

IIT-JEE-1997

24. यदि $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ एवं $g(x)=\frac{x}{\tan x'}$ जहाँ $0<x\le 1$ हो, तो इस अन्तराल में–

(A) f(x) एवं g(x) दोनों वर्द्धमान है। (B) f(x) एव g(x) दोंनो ह्रासमान है।
(C) f(x) वर्द्धमान है। (D) g(x) ह्रासमान है।

---

25. माना $f(x)=\begin{cases} xe^{ax}, & x\le 0 \\ x+ax^2-x^3, & x>0 \end{cases}$

जहाँ a एक धनात्मक अचर है। अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें f'(x) वर्द्धमान है।

IIT-JEE-1995

26. फलन $f(x)=\frac{\ln(\pi+x)}{\ln(e+x)}$

(A) $(0,\infty)$ वर्द्धमान (B) $(0,\infty)$ में ह्रासमान
(C) $\left(0,\frac{\pi}{e}\right)$ में वर्द्धमान $\left(\frac{\pi}{e},\infty\right)$ में ह्रासमान (D) $\left(0,\frac{\pi}{e}\right)$ में ह्रासमान, $\left(\frac{\pi}{e},\infty\right)$ में वर्द्धमान

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

27. अन्तराल [1,3] में फलन $f(x)=\log_e x$ के लिए माध्यमान प्रमेय के निष्कर्शों में C का मान है।

(A) $2\log_3 e$ (B) $\frac{1}{2}\log_e 3$ (C) $\log_3 e$ (D) $\log_e 3$

28. अन्तराल जिसमें फलन $f(x) = \tan H - 1(\sin x + \cos x)$ एक वर्धमान फलन है।

(A) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ (C) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (D) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

29. फलन को नीचे अनतराल के विरूद्ध मिलाया गया है, जहाँ यह वर्द्धमान माना गया है। निम्न में से कौनसा युग्त गलत मिलाया गया हे ?

	अन्तराल	**फलन**
(A)	$(-\infty,-4]$	x^3+6x^2+6
(B)	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$	$3x^2-2x+1$
(C)	$[2,\infty)$	$2x^3-3x^2-12x+6$
(D)	$(-\infty,\infty)$	x^3-3x^2+3x+3

30. फलन y=f(x) का द्वितीय कोटि अवकलज f"=6(x-1) है। यदि इसका वक्र, बिन्दु (2, 1) से गुजरता है और वक्र की इस बिन्दु की स्पर्श रेखा y = 3x - 5 है, तब फलन है–

(A) $(x-1)^2$ (B) $(x-1)^3$ (C) $(x+1)^3$ (D) $(x+1)^2$

31. वक्र $x = a(1+\cos\theta), y = a\sin\theta$ का 'θ' का अभिलम्ब हमेशा एक नियत बिन्दु से गुजरता है–

(A) (a,0) (B) (0,a) (C) (0,0) (D) (a,a)

32. वक्र $y - e^{xy} + x = 0$ की इस बिन्दु पर ऊर्ध्वाधन स्पर्श रेखा है।

(A) (0, 1) (B) किसी बिन्दु पर नहीं (C) (1, 1) (D) (1, 0)

33. वक्र $x^2 + xy + y^2 = 7$ की $(1,-3)$ पर अधोःस्पर्शी की लम्बाई है–

(A) 15 (B) 5 (C) 3 (D) 3/5

Answers

EXERCISE # 1-A

1. C 2. C 3. A 4. B 5. D 6. B 7. D

8. C 9. D 10. A 11. C 12. AB 13. BC

14. AD 15. BC 16. BC 17. ABC 18. ACD

EXERCISE # 1-B

1. $a \in R^+$ 3. $[1-\sqrt{6},1+\sqrt{6}]$

4. (I) $(-\infty,-3\cup[0,2]]$ में एकदिष्ट ह्रासमान
$[-30]\cup[2,\infty]$ में एकदिष्ट वर्द्धमान

(ii) $\left[\frac{2}{4n+3},\frac{2}{4n+1}\right], n \in Z$ में एकदिष्ट वर्द्धमान
$\left[\frac{2}{4n+1},\frac{2}{4n+1}\right], n \in Z$ में एकदिष्ट ह्रासमान

(iii) $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ में एकदिष्ट ह्रासमान,
$\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$ में एकदिष्ट वर्द्धमान

5. $(-\infty,-3]$

6. $(\pi/6)+(1/2)\ell n3, (\pi/3)-(1/2)\ell n3$

10. 2sinx + tanx > 3x, limit = 0

EXERCISE # 2-A

1. B 2. D 3. B 4. C 5. C 6. D 7. C

8. B 9. C 10. AD 11. AB 12. AD 13. AB

14. AD15. AC 16. ABCD

EXERCISE # 2-B

1. $\left|\sqrt{5},\sqrt{10}\right|$ 2. सभी $x \in [0,\infty)$ के लिए f(x) एकैकी है।

7. वर्द्धमान जब $x \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

हासमान जब $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

9. $a < -\left(2+\sqrt{5}\right) \text{or } a > \sqrt{5}$

10. $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$

11. $\ell n(1+x)$

EXERCISE # 3

1. (A) $\rightarrow$ (p,q,r,s),(B) $\rightarrow$ (p,q,r,s,)(C) $\rightarrow$ (p,q)(D) $\rightarrow$ (q)

2. (A) $\rightarrow$ (p,q), (B) (p,r) (C) $\rightarrow$ (r,s) (D) $\rightarrow$ (r,s)

3. D 4. A 5. B 6. C 7.1 C 7.2 A 7.3 A

8.1 C 8.2 B 8.3 B 9. True 10. True

11. True 12. False 13. False 14. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$

15. One. 16. $(-\infty,2\sqrt{2}-1)$ 17. $[0,\infty)$ 18. C =2

EXERCISE # 4

1. ABCD 2. C 3. B 4. B 5. B 6. B

8. C 9. D 12. A 16. A 17. A

18 $\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}p\right)$ 19 B 20 D 21 B 22 A

23 D 24 CD 25 $\left[\frac{-2}{a},\frac{a}{3}\right]$ 26 B

27 A 28 B29 B 30 B 31 A 32 D 33 A

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $f(x) = [a\sin x + b\cos x]\,[c\sin x + d\cos x]$ एकदिष्ट वर्द्धमान है, तो–
(A) $ad \geq bc$ (B) $ad < bc$ (C) $ad \leq bc$ (D) $ad < dc$

2. $x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ है–
(A) $x < 4$ के लिये ऋणात्मक (B) $x > 4$ के लिए धनात्मक
(C) $x \in (0,1)$ के लिए ऋणात्मक (D) $x \in (-1,0)$ के लिए ऋणात्मक

3. $f(x) = x^2 - x\sin x$ हे–
(A) $0 \leq x \leq \pi/2$ के लिए $\uparrow$ (B) $0 \leq x \leq \pi/2$ के लिए $\downarrow$
(C) $[\pi/4,\pi/2]$ के लिए $\downarrow$ (D) इसमें से कोई नहीं

4. फलन $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3), x\in(0,4)$ के लिये लेंगराज मध्यमान प्रमेय में c के मानों की संख्या है–
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

5. समीकरण $xe^x=2$ रखती है–
(A) एक मूल $x<0$ में (B) $x>1$ के लिये दो मूल
(C) (0, 1) में कोई मूल नहीं (D) (0, 1) में एक मूल

6. $f(x)=1+x\ell n\left[x+\sqrt{x^2+1}\right], g(x)=\sqrt{1+x^2}$ तो $x\geq 0$ के लिये
(A) f(x) < g g(x) (B) f(x) > g(x) (C) $f(x)\leq g(x)$ (D) $f(x)\geq g(x)$

7. प्राचल 'a' के मानों का समुच्चत जिसके लिये फलन f(x) = 8ax - a sin 6x - 7x - sin 5x वर्द्धमान है और सभी $x\in R$ R के लिए कोई क्रांतिक बिन्दु नहीं है।
(A) [-1, 1] (B) $(-\infty,-6)$ (C) $(6,+\infty)$ (D) $[6,+\infty)$

8. $f:[0,4]\to R$ एक अवकलनीय फलन है तो कुछ $a,b\in(0,4)$ के लिये $f^2(4) - f^2(0) =$
(A) 8f'(a)/ f(b) (B) 4f'(b) f(a) (C) 2f' (b) f(a) (D) f'(b) f(a)

9. f(x) तथा g(x). [0, 1] में अवकनीय है ताकि f(0) = 2, g(0)=0, f(1) = 6, f(1) = 2, तो निम्न में से किसके लिए रोग प्रमेख्य लागू होती है $c\in(0,1)$ विद्यमान है, इसके लिये f'(c) =
(A) f(x) - g(x) (B) f(x) - 2g(x) (C) f(x) + 3g(x) (D) इनमें कोई नहीं।

10. समीकरण $3x^2 + 4ax + b = 0$ कम से कम एक मूल [0, 1] में रखता है यदि–
(A) 4a + b + 3 = 0 (B) 2a + b + 1 = 0 (C) b = 0, $a=-\frac{4}{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं।

11. $0<a<b<\frac{\pi}{2}$ और $f(a,b)=\frac{\tan b-\tan a}{b-a}$, तो
(A) $f(a,b)\geq 2$ (B) $f(a,b)\geq 1$ (C) $f(a,b)\leq 1$ (D) इनमें से कोई नहीं

12. माना $f(x)=ax^4+bx^3+x^2+x-1$ तो यदि $9b^2<24a$, तो f(x) = 0 के कुल वास्तविक हलों की संख्या है।
(A) 4 (B) >2 (C) 0 (D) कह नही सकते

13. फलन जिसके लिये लेंग्राज माध्यमान (L.M.V) प्रमेय लागू होती है तो एक रोल प्रमेय नहीं
(A) $f(x)=x^3-x, x\in[0,1]$ (B) $f(x)=\begin{cases}x^2 & , \ 0\leq x<1\\ x & , \ 1<x\leq 2\end{cases}$
(C) $f(x)=e^x, x\in[-3,3]$ (D) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}, x\in[-1,1]$

14. निम्न में से किसके लिये लेंग्राज माध्यमान (L.M.V) प्रमेय लागू नहीं होती है ?
(A) $f(x)=x^2, x\in[3,4]$ (B) $f(x)=\ell n x, x\in[1,3]$
(C) $f(x)=4x^3+5x^2+x-2, x\in[0,1]$ (D) $f(x)=\left\{x^4(x-1)\right\}^{\frac{1}{5}}, x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

15. f(x) = (x - 1) (x-) (x-3 (x-4), तो f'(x) = 0 के मूल इस अन्तराल में स्थित नही होते–
(A) [1, 2] (B) (2, 3) (C) (3, 4) (D) $(4,\infty)$

16. $f(x)=1+x^m(x-1)^n, m,n\in N$, तो f'(x) =0 कम से कम एक मूल इस अन्तराल में रखता है।
(A) (0, 1) (B) (2,3) (C) (-1,0) (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

17. फलन $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2-7$ है–
(A) $[-2,0]$ और $[1,\infty)$ में $\uparrow$
(B) $(-8,-2]$ और [0, 1] में $\downarrow$
(C) [-2, 0] और $[1,\infty)$ में $\downarrow$
(D) $(-8,-2]$ और [0 ,1] में $\uparrow$

18. फलन $f(x)=x^2(x-1), x\neq 1$ है–
(A) $[0,1)\cup(1,2]$ में $\uparrow$
(B) $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ में $\downarrow$
(C) $[0,1)\cup(1,2]$ में $\downarrow$
(D) $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ में $\uparrow$

19. यदि p,q,r वास्तविक है तो अन्तराल जिसमें $\begin{vmatrix} x+p^2 & pq & pr \\ pq & x+q^2 & qr \\ pr & qr & x+r^2 \end{vmatrix}$

(A) वर्द्धमान है $x<-\frac{2}{3}(p^2+q^2+r^2), x>0$ (B) ह्रासमान है $(-\frac{2}{3}(p^2+q^2+r^2),0)$

(C) ह्रसमान है $x<-\frac{2}{3}(p^2+q^2+r^2), x>0$ (D) वर्द्धमान है। $(-\frac{2}{3}(p^2+q^2+r^2),0)$

20. निम्न में से कौनसी असमिकाएं संभव है।
(A) $|\tan^{-1}x-\tan^{-1}y|\leq|x-y|\forall x,y\in R$
(B) $|\tan^{-1}x-\tan^{-1}y|\geq|x-y|$
(C) $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$
(D) $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

---

1. मान $f(x)=\begin{cases}\max(x,x^2) & x\leq 0\\ \min(x,x^2-2) & x\leq 0\end{cases}$,f(x) का ग्राफ खींचिए और x=-1,0,1 पर एकदिष्टता के व्यवहार पर टिप्पणी कीजिए–

2. अन्तरा $[0,\pi/2]$ को उपअन्तराल में विभक्त कीजिए जिसके लिऐ $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ वर्धमान या ह्रासमान है।

3. 'a' के वह मान ज्ञात कीजिए जिसे लिये $f(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x - 2ax$ वर्धमान है सम्पूर्ण वास्तविक रेखा के लिये ।

4. निम्न समिकाओं को सिद्ध कीजिए–

(i) $1 + x^2 > (x \sin x + \cos x)$ $x \in (0,\infty)$ के लिऐ

(ii) $x \text{in } x - \sin 2x \le 2x$ सभी $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ के लिये

(iii) $\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ge (3 - x)e^x$ सभी $x \ge 0$ के लिये

5. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिऐ सिद्ध कीजिए कि $0 < x\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} < \frac{1}{2}(\pi - 1)$

6. उस अन्तराल को ज्ञात कीजिए जिसमें b का विद्यमान रहता है ताकि फलन $f(x) = \left(1 - \frac{\sqrt{21 - 4b - b^2}}{b+1}\right)x^3 + 5x + \sqrt{6}$ उसके प्रान्त के प्रत्येक बिन्दु पर वर्द्धमान है।

7. दोनों में से कौन बड़ा है $\ell n(1+x)$ या $\frac{\tan^{-1} x}{1+x}, x \ge 0$

8. यदि $0 < x < 1$ सिद्ध कीजिए कि $y = x\ell n x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ एक फलन है

ताकि $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, निगमन कीजिए कि $x\ell nx > \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

9. दर्शाइये कि $x^2 > (1+x)[\ell n(1+x)]^2 \forall x > 0$

10. माना $f(x) = \begin{cases} xe^{ax} & , x \le 0 \\ x + ax^2 - x^3, & x > 0 \end{cases}$ जहाँ a एक धनात्मक अचर है। अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें f'(x) वर्धमान है।

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

ANSWERS

EXERCISE # 1

1. A 2. B 3. A 4. B 5. D 6. D 7. D

8. A 9. B 10. B 11. B 12. B 13. C 14. D

15. D 16. A 17. AB 18. CD 19. AC 20. AC

EXERCISE #2

1. X = -1 न तो ह्रासमान नही वर्धमान, X=0,1 पर वर्धमान

2. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ में वर्धमान, $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ में ह्रासमान 3. $[1,\infty)$

6. $[-7,-1]\cup[2,3]$ 7. $\ell n(1+x)$

10. $\left(-\frac{2}{a},\frac{a}{3}\right)$

for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE
&
15 Yrs. Que. of AIEEE
we have distributed already a book